C. Phillips

Обзор современной науки

DCS

Robotics

Теория поля и электродинамика

C. Phillips

2014

Глава 1

Электродинамика

Предисловие

1. Глава 1. Электродинамика

Предисловие

В отличии от классических учебников, я в настоящей книге принял обратный порядок изложения материала. Это позволит сразу более полно представить предмет.

§1.1 Понятие поля

Поле является очень важным и фундаментальным понятием современной физики. Есть несколько разных подходов к его пониманию. Первый подход математичкий, пространство дополняется особой структурой, а именно каждой точки пространства сопоставляется элемент некоторого линейного пространства, например, скаляр, вектор или тензор, в итоге мы получаем, соответсвенно, скалярное, векторное или тензорное поле. Второй подход основан на квантовой физике и будет подробно изучен в соответсвующей части. Его основная идея состоит в том, что поле формируется совокупностью виртуальных частиц.

Начнем с небольшого исторического обзора. Исторически первая концепция, близкая к полю, – это эфир.

§1.2 Электромагнитное поле

1.2.1 Потенциал и тензор напряженностей

В пространстве Минковского[1] введем векторное поле: $A_\mu : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \varphi \\ -A_x \\ -A_y \\ -A_z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

[1] см. часть 3. Релятивистская механика

где φ – скалярный потенциал электрического поля, $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ – векторный потенцал магнитного поля. В этой записи электрическое поле будет выражаться как:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.2}$$

А магнитное поле:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.3}$$

Также введем тензор напряженности электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.4}$$

Из этой формулы, пользуясь (1.1), (1.2), (1.3), получаем что ковариантные компоненты тензора есть:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Контравариантные в свою очередь будут:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Для примера рассмотрим выводы для[2]

$$E_x = F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$B_x = F_{32} = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

Что соответсвует формулам (1.2) и (1.3).

[2] Для остальных компонент вывод совершенно аналогичен

Тогда сила действующая на заряженную частицу, движущуюся в поле будет:

$$\mathcal{F}^{\nu} = \frac{q}{c} F^{\nu\mu} u_{\mu} \tag{1.7}$$

где

$$\mathcal{F}^{\nu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \left(\gamma \frac{\mathbf{vF}}{c}, \gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z\right)$$

– 4-вектор силы,

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu} u^{\nu} = (\gamma c, -\gamma v_x, -\gamma v_y, -\gamma v_z)$$

– ковариантная 4-скорость.

Из этого выражения можем найти формулу для силу Лоренца в обычних декортовых координатах:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\right) \tag{1.8}$$

Проверим вывод для одной из компонент:

$$\gamma F_x = \mathcal{F}^1 = \frac{q}{c} F^{1\mu} u_{\mu} = \frac{q}{c}\left[E_x \gamma c - B_z \gamma(-v_y) + B_y \gamma(-v_z)\right]$$

$$F_x = q\left(E_x + \frac{1}{c}(B_z v_y - B_y v_z)\right)$$

§1.3 Вывод уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла можно вывести из закона Кулона, принципа суперпозиции и Лоренцевской инвариантности.

Покоящийся точечный заряд q создает электростатическое поле, выражающееся формулой

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \tag{1.9}$$

Поле двух зарядов равно алгебраической сумме полей каждого из них (*принцип суперпозиции*)

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \frac{q_i}{r_i^2}\mathbf{e}_{r_i} \tag{1.10}$$

Что можно записать в виде интеграла по объему, заполненному объемным зарядом ρ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2} dV' \tag{1.11}$$

где интегрирование идет по переменной $\mathbf{r}'$, а $dV' = \mathbf{r}'^3$ – элемент объема.

Этот интеграл можно записать упрещенно (полагая что вектор $\mathbf{r}$ откладывается от точки, в которой ищется поле):

$$\mathbf{E} = \int_V \frac{\rho}{r^2} dV \tag{1.12}$$

Рассмотрим поток поля $\mathbf{E}$ через замкнутую поверхность S ограничивающую объем V:

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{dS} = \mathbf{n}dS$, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности.

Теперь применим теорему Гаусса-Остроградского

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV \tag{1.14}$$

Так как S – произвольная поверхность, то рассмотрим сферу радиуса ε, и вычислим поток через неё (?)

$$\Phi = \int_S \left[\int_V \frac{\rho}{r^2}\mathbf{e}_r dV\right] \cdot \mathbf{dS} = \int_S \frac{4/3\pi\varepsilon^3\rho}{\varepsilon^2} dS = \frac{4/3\pi\varepsilon^3\rho}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^3\rho$$

В результате получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{1.15}$$