C. Phillips

Обзор современной науки

DCS

Robotics

Математический анализ

C. Phillips

2014

Глава 1

Предел последовательности и функции

Предисловие

Перед началом изучения математического анализа, или просто матанализа, необходимо сказать пару предварительных замечаний о его особенностях и предмете.

Математический анализ представляет сабой очень важный раздел математики. Его прилажения в естественных науках, особенно в физике, огромны. Без его использования наука и техника не могли бы развиться до современного уровня.

Эта часть разбита на несколько глав. Вот их краткое описание:

1. **Предел последовательности и функции** В этой главе даются базовые понятия математического анализа — последовательности и ее предел. Данная глава самая короткая в этой части.
2. **Производная и дифференциал**
3. **Интеграл. Первообразная**
4. **Тензорный анализ**
5. **Комплексный анализ**
6. **Функциональный анализ**
7. **Анализ на многообразиях**
8. **Топология**

После изучения первых трех глав можно преступить к изучению Части 3. Механика.

§1.1 Последовательность

Числовой последовательностью, или вариантой, называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Обозначется как x_n, где $n \in \mathbb{N}$. Это общепринятое обозначение эквивалентное следующему

$$f(n) = x_n$$

Последовательность необходимо представлять как множество пронумерованных чисел. То есть сопоставления номера с числом. Например:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots$$

В общем виде эту последовательность можно записать в виде:

$$x_n = n$$

§1.2 Предел последовательности

В этом разделе мы приступим к изучению основополагающего понятия в математическом анализе — пределу.

Число ξ называется *пределом* числовой последовательности x_n, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \quad |x_n - \xi| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Понимать это нужно следующим образом. Для любого положительного числа ε найдется натуральное число n_0 такое, что для любого натурального числа n, большего его, модуль разности $|x_n - \xi| < \varepsilon$.

Подробно разберем следующий пример.

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Нам нужно показать что для любого ε, можно найти n_0, отвечающий определению предела. Возьмем:

$$n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$$

При таком выборе

$$0 < x_n = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0 + 1} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} < \frac{1}{(\frac{1}{\varepsilon})} = \varepsilon$$

$$|x_n - \xi| \leqslant |x_n| + |\xi| < \varepsilon + |\xi|$$

Заметим что при $\xi = 0$ имеет

$$|x_n - \xi| < \varepsilon$$

Откуда следует что

$$\lim x_n = \lim \frac{1}{n} = 0$$

§1.3 Свойства и теоремы

Глава 2

Производная и дифференциал

§2.1 Одномерные функции

2.1.1 Производная

Определение производной

Пусть $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, а $x_0 \in (a, b)$ — заданная точка интервала. Рассмотрим предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

если этот предел существует и конечен, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0, а значение предела называют значением *производной* функции в точке $f'(x_0)$. Этот предел можно переписать иначе:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.1}$$

Если $f(x)$ имеет производную во всех точка интервала (a, b), то говорят, что функция дифференцируема на этом интервале. Рассмотрим отображение $f'(x)$, составленное из производных в соответсвтующих точка интервала (a, b), его называют производной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Из формулы (2.1) следует, что...

Свойства операции дифференцирования

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{2.2}$$

Докажем, ограничевшись случаем со знаком $+$. Подставим $f(x) + g(x)$ в определение производной (2.1) и воспользуемся известным свойством предела:

$$\begin{aligned}
&(f(x_0) + g(x_0))' = \\
&\qquad = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \\
&\qquad = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&\qquad\qquad = f'(x_0) + g'(x_0)
\end{aligned}$$

Что и доказывает формулу (2.2).

2.1.2 Дифференциал

§2.2 Многомерные функции

2.2.1 Частные производные

Для простоты рассмотрим функцию двух переменных:

$$f(x, y)$$

Рассмотрим ее как функцию от x с параметром y, то в продположение, что x — переменная, а y — константа. И найдем ее производную по x как от функции одной переменной:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

называемую частной производной. Аналогично существует и вторая частная производная:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

В случае n-мерного пространства аргументов существует n производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^n) \qquad \dots \qquad \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n)$$

Для функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена **матрица Якоби**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Полный дифференциал

Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n$, а x — внутренняя точка X. Говорят, что функция дифференцируема в точке x, если существует линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такое что

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + o(h)$$

где $h \in \mathbb{R}^n$, под $o(h)$ понимается произвольная функция $\beta(h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такая что $\|\beta(h)\| = \alpha(h)\|h\|, \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Можно показать что

$$\mathrm{d}f(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x^n \end{pmatrix}$$

В индексных (тензорных) обозначениях имеем:

$$(\mathrm{d}f)^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$$

Отдельно рассмотрим случай функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\mathrm{d}x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

2.2.3 Неявные функции

Неявно заданных отображением называется связь между переменными, которые ограничены набором условий ($m < n$):

$$\begin{gathered} f^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \ldots \\ f^m(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{gathered}$$

Подобная постановка задачи регулярно встречается в физике. Рассмотрим пример из термодинамики. Задана уравнение состояния:

$$f(P, V, T) = PV - \nu RT = 0$$

где R и ν — константы, P, V и T переменные.

Найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial P} = V \qquad \frac{\partial f}{\partial V} = P \qquad \frac{\partial f}{\partial T} = -\nu R$$

Добавим в задачу еще одно условие — уравнение адиабаты

$$g(P, V, T) = PV^\gamma - \xi = 0$$

где γ и ξ константы.

Найдем матрицу Якоби:

$$A_{f,g} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(P, V, T)} = \begin{pmatrix} V & P & -\nu R \\ V^\gamma & \gamma P V^{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Выразим переменную V из этих уравнений

$$V = \left(\frac{P}{\xi}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{\nu RT}{\xi}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Откуда можно найти производные

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{\gamma\xi}\left(\frac{P}{\xi}\right)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}}$$
$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{T(1-\gamma)}\left(\frac{\nu RT}{\xi}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Можнот возникнуть желание собрать эти производные в полный дифференциал, но это недопустимо, так как это производные двух разных функций, а именно $V(P)$ и $V(T)$. И писать можно толко так:

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial P}\mathrm{d}P = \frac{\partial V}{\partial T}\mathrm{d}T$$

Теперь попробуем найти частные производные, применяя теорему о неявном отображении. Вначале рассмотирим $V(P)$ и $T(P)$:

$$\begin{pmatrix} P & -\nu R \\ \gamma P V^{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial P} \\ \frac{\partial T}{\partial P} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} V \\ V^\gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial P} \\ \frac{\partial T}{\partial P} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\gamma P V^{\gamma-1}} \\ -\frac{1}{\nu R} & \frac{1}{\nu R \gamma V^{\gamma-1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ V^\gamma \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{V}{\gamma P} = -\frac{1}{\gamma P}\left(\frac{P}{\xi}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} = -\frac{1}{\gamma\xi}\left(\frac{P}{\xi}\right)^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}}$$

Что совпадает с полученным ранее результатом.

Глава 4

Анализ на многообразиях

§4.1 Метрическое пространство

4.1.1 Норма и метрика

4.1.2 Шары норм

Опр. шара нормы. Пусть X – нормированное пространство с нормой $\|x\|$. Множество

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

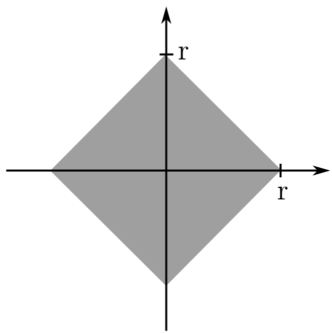
называется *открытым шаром* с центром x и радиусом r. Множество

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром* с центром x и радиусом r.

Изобразим шары для основных норм.

Норма l_1: $B_1(0, r) = \{x \in X : |x^1| + |x^2| < r\}$



Заметим, что шары вложены друг в друга

$$B_1(0, r) \subset B_2(0, r) \subset B_\infty(0, r)$$

$$|x|_1 \geqslant |x|_2 \geqslant |x|_\infty$$

4.1.3 Классификация множеств

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$.

Опр. внутренней точки. Точка $a \in X$ называется *внутренней* точкой множества X если

$$\exists r > 0 \; B_2(a, r) \subset X$$

Опр. внешней точки. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *внешней* точкой множества X если

$$\exists r > 0 \; B_2(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$$

Опр. граничной точки. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной* точкой множества X если

$$\exists r > 0 \; B_2(a, r) \cap X \neq \varnothing \wedge B_2(a, r) \cap \mathbb{R}^n \setminus X \neq \varnothing$$

Опр. прелельной точки. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной* точкой множества X если

$$\forall r > 0 \; \exists x \in X, x \neq a \; x \in B_2(a, r)$$

Опр. внутренности. Вножество всех внутренних точек называется *внутренностью* множества

$$\operatorname{int} X$$

Опр. внешности. Вножество всех внешних точек называется *внешностью* множества

$$\operatorname{ext} X$$

Опр. границы. Вножество всех внешних точек называется *границей* множества

$$\partial X$$

Опр. замыкания. Объединение множества всех внешних точек и самого множества называется *замыканием* множества

$$\operatorname{cl} X = \overline{X}$$

Опр. открытого множества. Множество X называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Опр. замкнутого множества. Множество X называется *замкнутым*, если все его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ открыто.

Опр. ограниченного множества. Множество X называется *ограниченным*, если

$$\exists r > 0 \ X \subset B(0, r)$$

Опр. компактного множества. Множество X называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Опр. связного множества. Множество X называется *связным*, если (?)

Опр. областью множества. Множество X называется *областью*, если оно открыто и связно.

§4.2 Многообразие

4.2.1 Определение многообразия

Опр. многообразия в $\mathbb{R}^n$

Множество $M \in \mathbb{R}^n$ называется *гладким k-мерным многообразием*, если $\forall x \in M$ найдутся окрестность $\Omega(x) \subset \mathbb{R}^n$ точки x; область $U \subset \mathbb{R}^k$; и параметризация $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, такие что либо $\Phi(U) = M \cap \Omega$, либо $\Phi(U \cap \mathbb{H}^k) = M \cap \Omega$, где $\mathbb{H}^k = \{(u^1, \dots u^k) \in \mathbb{R}^k : u^k \geqslant 0\}$.

§4.3 Отображения