C. Phillips

Обзор современной науки

DCS

Robotics

Алгебра

C. Phillips

2014

Глава 1

Логика. Множества

Непосредственное знакомство с математикой начнем с ее основы — логики. Это не совсем та обыденная, житейская логика, с которой мы все хорошо знакомы; это очень строгий и формальный язык (способ) рассуждений, на котором построена вся математика.

§1.1 Логика

1.1.1 Логические высказывания

Логика работает с тремя типами объектов: высказываниями, операторами и кванторами.

Посмотрим, что такое высказывание. Это некоторое утверждение, которое, в зависимости от ситуации или независимо от ситуации, может быть верным (истинным) или неверным (ложным). Это могут быть утверждения любого рода, главное, чтобы можно было однозначно установить верно оно или ложно. Привидем несколько примеров. Новосибирск — это город. Число 8 делится на 2.

Высказывания могут зависить от некоторой переменной. Например, утвеждение P от x верно, если x — город. Кратко его можно сформулировать так: x — это город. Оно будет становится ложным или истинным в зависимости от того, что чем будет переменная x. В математический обозначениях это обозначается как

$$P(x)$$

1.1.2 Логический операции

Пусть дано два высказывания P и Q.

§1.2 Множества

Снова рассмотрим пример с высказыванием «x — город». Можно сказать, из всех возможных объектов мы выбираем города. Эти выбранные города образуют некоторый набор, или как говорят математики — *множество*.

Про любое заданное множество можно однозначно сказать принадлежит ему объект, или нет. Принадлежность элемента множеству обозначается как

$$P(x) = x \in A$$

Глава 2

Числа. Алгебра

§2.1 Натуральные числа

Теперь пришло время познакомиться с конкретными математическими моделями, увидеть их в действие, изучить их внутреннюю структуру. Проще всего начать с чисел. На них можно легко увидеть и ощутить особенности подобных моделей.

Зададим себе вопрос, что такое число? В введении про это было уже сказано несколько слов. Надо четко уяснить что число — это идеализированный абстрактый (лат. abstractio — отвлечение) объект, т.е. не связанный с какими-то реальными объектами непосредственно.

Как уже говорилось во введении, натуральные числа — это числа используемые при счете. Попробуем более точно определить, что это такое. Теперь мы уже не будем ссылаться на какие-либо физические модели.

2.1.1 Аксиомы Пеано

Одним из способов определения натуральных чисел являются *аксиомы Пеано*. Они позволяют определить натуральные числа совершенно абстрактным способом.

1. **1** является натуральным числом;
2. Число, *следующее* за натуральным, тоже является натуральным;
3. **1** не *следует* ни за каким натуральным числом;
4. Если число a следует за натуральным числом b, так и за числом c, тогда числа a и b тождественны;
5. Если утверждение верно относительно числа **1**, а также из его верности для числа n следует его верность для числа, следующего за n, то оно верно для всех натуральных чисел.

В математических обозначениях это записывается следующим образом:

$$
\begin{gathered}
1 \in \mathbb{N} \\
x \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x) \in \mathbb{N} \\
\nexists x \in \mathbb{N} : S(x) = 0 \\
S(b) = a \wedge S(c) = a \Rightarrow b = c \\
P(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \big(P(n) \Rightarrow P(S(n))\big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)
\end{gathered}
$$

На построенном множестве задается операция *сложения* (*сумма*) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\forall a, b \in \mathbb{N} : \exists (a + b) \in \mathbb{N} \\
\forall a \in \mathbb{N} : a + 1 \equiv S(a) \\
\forall a, b \in \mathbb{N} : S(a) + b \equiv a + S(b)
\end{gathered}
$$

Но в натуральных числах не всегда возможна операция вычитания, например $5 - 8$ не имеет решения. С этой целью можно расширить систему натуральных чисел следующим образом: добавить такие два числа

$$
\begin{gathered}
\exists 0 \in \mathbb{Z} \forall a \in \mathbb{Z} : a + 0 = a \\
\forall a \in \mathbb{Z} \exists (-a) \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0
\end{gathered}
$$

Таким образом мы получили систему *целых чисел*, которую можно определить как:

$$
\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-a | a \in \mathbb{N}\}
$$

В полученной системе всегда возможно вычитание. Из этого, в слою очередь, следует, что операция сложения стала обратимой. Также появился нейтральный элемент: ноль 0. Структуры обладающие подобными свойствами в математике называются *группами*.

§2.2 Рациональные числа

Для натуральный чисел операция деления невсегда возможна. С этой целью вводятся *рациональные числа*, или *обыкновенные дроби*.

В основе рационального числа лежит пара целых чисел (p, q), где $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Записывается эта пара следующим образом:

$$\frac{p}{q}$$

Число p называется *числителем* дроби, а q — *знаменателем*.

§2.3 Вещественные числа

2.3.1 Определение

В рациональный числа неразрешимы некоторые уравнение, связанные например с возведением в степень (даже целую). Например, $x^2 = 2$, не имеет решения в рациональных числах. Формально можно написать $x = \pm\sqrt{2}$.

Докажем, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Воспользуемся методом от противного. Пусть существует несократимая дробь

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$
$$p^2 = 2q^2$$

Следовательно p четное, тогда его можно представить как $p = 2r$.

$$(2r)^2 = 2q^2$$
$$4r^2 = 2q^2$$
$$2r^2 = q^2$$

Получаем, что q тоже четное число. Следовательно дробь $\frac{p}{q}$ является сократимой, что противоречет условию. Это доказывает требуемое утверждение.

Существует несколько способов абстрактно определить вещественные числа. Мы воспользуемя теорией вещественных чисел *Дедекинда* (R. Dedekind). В ее основе лежит понятие *сечения.* Сечение — это разбиение множества рациональных чисел на два непустых множества A и A', которые удовлетворяют следующим требованиям:

1. Каждое из рациональных чисел обязательно попадает в одно из этих множеств.

2. Каждое число из множества A, больше любого числа из множества A'.

Множество A называют *верхним классом*, а множество A' — *нижним классом.* Такое сечение обозначается $A|A'$. Из определения следует, что всякое рациональное число, меньшее числа из нижнего класса, также принадлежит нижнему классу. Аналогично, всякое число, большее числа из верхнего класса, тоже принадлежит верхнему классу.

<

1. Определим класс A следующим образом, отнесем к нему все рациональные числа, удовлетворяющие неравестрву $a < 1$, а к верхнемму классу A' чила $a' \geqslant 1$. Легко проверить, что подобное разбиение является сечением.

>

2.3.2 Арифметические операции

Сложение Пусть даны два вещественных числа α и β. Тогда их суммой $\gamma = a + b$ назовем вещественное число, образованое сечением $C|C'$, к верхнему классу которого отнесем все возможные суммы чисел из вехних классов A и B, а к нижнему, соответственно все возможные суммы числе и нижних классов A' и B':

$$C = \{a + b | a \in A \wedge b \in B\}$$

$$C' = \left\{a' + b' | a' \in A' \wedge b' \in B'\right\}$$

Покажем что $C|C'$, действительно является сечением.

$$\forall a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B'$$

выполняется (сложение неравенств для рациональных чисел).

$$a' + b' < a + b \Leftrightarrow a' < a \wedge b' < b$$

Полученная таким образом операция обладает следующими свойствами (коммутативность и ассоциативность, соответственно):

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \beta + (\alpha + \gamma)$$

Умножение

2.3.3 Полнота

Построенная наким образом, система вещественных чисел обладает одним очень важным замечательный свойством — *полнотой*. Это свойство позваляет ввести понятие *предела*, на котором строится весь математический анализ.

§2.4 Комплексные числа

2.4.1 Определение

Рассмотрим уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

Очевидно оно не имеет решения в вещественных числах, так как $x^2 = -1 < 0$. Но можно попробовать расширить систему вещественных чисел добавив к ним числа, которые при возведении в квадрат становятся меньше нуля.

Сделаем мы это следующим образом. Введем обозначение

$$i^2 = -1$$

называемое *мнимой единицей*. А числа, которые в квадрате дают отрицательные числа, будем обозначать ai, где a — вещественное число.

Числа вида $a+bi$ называют **комплексными числами**, считая что для них справедливы обычные правила сложение и умножения.

1. Сложение и вычитание

$$(a_r + ia_i) + (b_r + ib_i) = (a_r + b_r) + i(a_i + b_i)$$

2. Умножение

$$(a_r + ia_i) \cdot (b_r + ib_i) = (a_r b_r - a_i b_i) + i(a_r b_i + a_i b_r)$$

3. Деление

$$\frac{a_r + ia_i}{b_r + ib_i} = \frac{(a_r + ia_i)(b_r - ib_i)}{(b_r + ib_i)(b_r - ib_i)} = \frac{a_r b_r - ia_r b_i + ia_i b_r + a_i b_i}{b_r^2 - ib_i^2}$$
$$= \frac{a_r b_r + a_i b_i}{b_r^2 - ib_i^2} + i\frac{a_i b_r - a_r b_i}{b_r^2 - ib_i^2}$$

2.4.2 Геометрическое представление. Тригонометрическая запись

Комплексные числа можно представлять как пару вещественных чисел (a, b) — координаты точки на декартовой плостости. Такую плоскость называют **комплексной плоскостью**, или **плоскостью Аргана**.

На комплексной плоскости каждое комплексное число $a + ib$ представляет собой вектор, соединяющий начало отсчета $(0, 0)$ с точкой (a, b).

В таком представлении легко представить, что такое сложение и вычитание комплексных чисел.

Рассмотрим угол ϕ между осью абсцисс и вектором, направленным на точку (a, b), и расстояние ρ от начала координат до точки. Через эти переменные комплексное число выражается следующим образом:

$$z = a + ib = \rho\cos\phi + i\rho\sin\phi$$

Такое представление комплексного числа называется **тригонометрической формой**. При этом $\rho = |z|$ называется модулем комплексного числа, а $\phi = \text{Arg } z$ — аргументом.

Рассмотрим произведение комплексных чисел в тригонометрической записи

$$\begin{gathered}(\rho_1\cos\phi_1 + i\rho_1\sin\phi_1)\cdot(\rho_2\cos\phi_2 + i\rho_2\sin\phi_2)\\ = \rho_1\rho_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2)\\ + i\rho_1\rho_2(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)\\ = \rho_1\rho_2\cos(\phi_1+\phi_2) + i\rho_1\rho_2\sin(\phi_1+\phi_2)\end{gathered}$$

Значит при умножении двух комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы — складываются.

2.4.3 Комлексное сопряжение

Введем операцию для комплексных чисел, не имеющую аналога у действительных — **комплексное сопреже-**

ние:

$$\overline{a+ib} = (a+ib)^* = a - ib$$

состоящее в изменении знака у мнимой части.

Эта операция обладает следующими свойствами:

$$\overline{x \pm y} = \overline{x} \pm \overline{y}$$
$$\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$
$$z\overline{z} = \mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z = |z|^2$$

2.4.4 Комплексная экспонента

Для вещественных числе существует особая функция — экспонента, которая может быть определена как сумма ряда

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

или как предел последовательности

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Вычислим e^z, где $z = ix$, учитывая, что $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i\sin x \end{aligned}$$

Данное равентсво называется *формулой Эйлера.*

Пусть теперь $z = a + ib$:

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

Пользуясь этим равенством, а также фактом что

$$(ae)^\alpha = a^\alpha e^\alpha$$

можно доказать, что произвольная вещественная степень комплексного числа

$$(\rho \cos \phi + i\rho \sin \phi)^\alpha = \rho^\alpha \left(\cos \alpha\phi + i \sin \alpha\phi\right)$$

В частности при $\alpha = n$ и $\alpha = \frac{1}{n}$, где n — целое, оно обращается в *формулу Муавра*:

$$(\rho \cos \phi + i\rho \sin \phi)^n = \rho^n \left(\cos n\phi + i \sin n\phi\right)$$

$$(\rho \cos \phi + i\rho \sin \phi)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\phi}{n} + i \sin \frac{\phi}{n}\right)$$

В итоге имеем, что при возведении в степень модуль чиста возводится в степень, а аргумент умножается на степень. В свою очередь при вычислении корня из модуля извлекается корень, а аргумент делится на степень корня.

§2.5 Алгебра

2.5.1 Определение

Пусть имеется некоторое множество G, а на нем задан набор операций и отношений, удовлетворяющий системе аксиом, тогда это множество называется *алгебраической системой*. Обозначается: $(G, +, *)$. Множество G назвается носителем.

Глава 3

Матрицы. Линейная алгебра

§3.1 Линейная комбинация

Основным предметом изучения линейной алгебры являются *линейные комбинации*. С этим понятием тесно связаны пространство, вектор, матрица и многое другое. Введем основные определения.

Векторное пространство. *Линейным*, или *векторным пространством*, над *полем* F — это *алгебраическая система* $(V, F, +, \cdot)$, где
V — непустое множество элементов произвольной природы, его элементы — *векторы*,
F — поле, его элементы — *скаляры*, а также заданы два отображения:
$+ : V \times V \to V$,
$\cdot : F \times V \to V$.

Которые обладают следующими свойствами:

$$\forall \alpha, \beta \in F \qquad \forall x, y, z \in V$$

1. *Коммутативность*

$$x + y = y + x$$

2. *Ассоциативность*

$$(x + y) + z = y + (x + z)$$

3. Существование *нейтрального элемента*

$$\exists 0 \in V \quad x + 0 = 0 + x = x$$

4. Существование *обратного элемента*

$$\exists (-x) \in V \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

5. *Унитарность*

$$\exists 1 \in F \quad 1 \cdot x = x$$

6. *Дистрибутивность* умножения относительно сложения векторов

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

7. Дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

В итоге векторное пространство является *абелевой группой* по сложению. Свойства, связанные с умножением на скаляр, спецефичны только для векторных пространств и подобных им структур.

Обсудим более подробно, что такое *вектор* и *скаляр*. Прежде всего скаляр — это просто число. В свою очередь, вектор — более сложный объект.

Стоит помнить, что скаляр и число — это не одно и тоже: число является скаляром *по отношению к* вектору. В некоторых случаях скаляром может быть и не число (не все поля состоят из чисел).

Более подробное изучение векторов и их свойств отложим до главы 4.

Линейная комбинация *Линейной комбинацией* называется сумма вида:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

где α_i — скаляры, а α_i — векторы. Из свойств векторов следует, что она и сама является вектором

Линейная комбинация называется *нулевой*, если

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

Глава 4

Тензорная алгебра

§4.1 Векторное пространство

Некоторые свойства и понятия связанные с линейными пространствами уже упомянались в главе 3, но важность и глубина этих представлений заставляет изучить вопрос еще глубже.

В предыдущей главе мы рассматривали векторы как наборы чисел в конкретных базисах, в этой же главе мы будим рассматривать их свойства вне конкретных базисов.

Развитый в этой главе аппарат будет применен в *тензорном анализе* при изучении полей и многообразий, в *дифференциальной геометрии*, на которых в свою очередь основаны такие разделы физики как *электродинамика* и *общая теория относительности*.

Очень важно для успеха и полноты дальнейшено изучения глубоко понять и осознать понятия и сущности, которые будут введены в этой главе.

4.1.1 Определение

Линейным, или **векторным пространством** $\mathbb{V}$, над *полем* $\mathbb{F}$ называется *алгебраическая система* $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +, \cdot)$, где

$\mathbb{V}$ — непустое множество элементов произвольной природы, его элементы — **векторы**,

$\mathbb{F}$ — поле, его элементы — **скаляры**, а также заданы два отображения:

$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$,

$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Которые обладают следующими свойствами:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{V}$$

1. *Коммутативность*
$$x + y = y + x$$
2. *Ассоциативность*
$$(x + y) + z = y + (x + z)$$
3. существование *нейтрального элемента*
$$\exists 0 \in V \quad x + 0 = 0 + x = x$$
4. существование *обратного элемента*
$$\exists (-x) \in V \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$
5. *унитарность*
$$1 \cdot x = x$$
6. *дистрибутивность* умножения относительно сложения
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

7. дистрибутивность умножения относительно сложения
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Построенная таким образом алгебраическая система, как уже упомяналось в главе 3, обладает множеством замечательных свойств.

Далее мы будем рассматривать случай, где F — поле вещественных чисел.

4.1.2 Базис. Размерность пространства

Система векторов $e_1, \dots, e_n$ называется **базисом** пространсва V, если

$$\forall x \in V \quad \exists! x^1, \dots, x^n \in R \quad x = x^i e_i$$

$$x = y \iff x^i = y^i$$

Числа $x^1, \dots, x^n$ называются разложением вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Из этого следует, что вектора базиса линейно независимы. Можно доказать, что количество векторов во всех базисах V равны, и называется размерность пространства V.

§4.2 Сопряженное пространство

4.2.1 Определение

Пусть $\mathbb{V}$ — вещественное векторное пространство.

Линейное пространство $\mathbb{V}^*$ называется сопреженным к пространству $\mathbb{V}$, элементами которого являются отображения $\omega : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, если

$$\forall \omega \in \mathbb{V}^* \quad \forall x, y \in \mathbb{V} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y)$$

$$\omega(\lambda x) = \lambda \omega(x)$$

$$\forall \omega, \eta \in \mathbb{V}^* \quad \forall x \in \mathbb{V} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x)$$

$$(\lambda \omega)(x) = \lambda \omega(x)$$

4.2.2 Базис

4.2.3 Канонический изоморфизм конечномерного векторного пространства и его второго сопряженного

§4.3 Тензоры

§4.4 Аффинные пространства